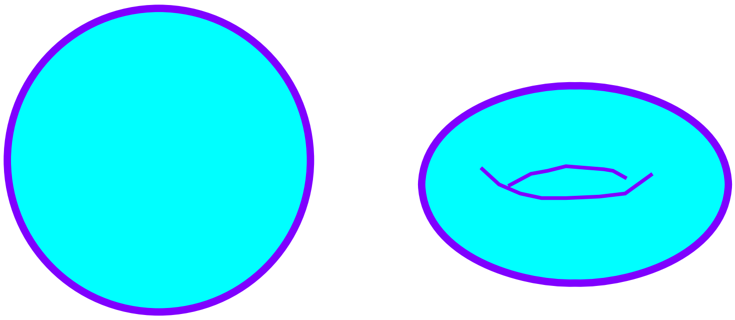
# درس هفتم : گروه های لی وجبرهای لی وابسته به آنها

دردرس گذشته باگروه های پیوسته آشنا شدیم. دراین درس با گروه های لی و جبر های لی و رابطه آن دو باهم آشنا می شویم. نخست این دو مفهوم را به طور جداگانه شرح می دهیم و سپس رابطه آن دو را باهم روشن می کنیم. گروه های لی گروه های پیوسته ای هستند که عناصر آنها باتعداد محدودی پارامتر پیوسته ای مشخص می شوند. تعداد این پارامترها بعد گروه لی خوانده می شود. ضرب هرعضو دریک عضودیگر عضوی باپارامترهای جدید تولید خواهد کرد. دریک گروه لی پارامترهای جدید توابع مشتق پذیری از پارامترهای عناصرضرب شونده هستند. هم چنین پارامترهای وارون یک عضو توابع مشتق پذیری ازپارامترهای عضواولی است. این قیود ساختارگروه لی را بشدت محدود می کند و به ما اجازه می دهد که تقریباً تمامی گروه لی را بامطالعه عناصرنزدیک به عضوواحد آن بدست بیاوریم، کاری که درمورد گروه های ماتریسی انجام داده ایم. درواقع گروه های ماتریسی نمونه های بسیارمهم گروه لی هستند. مسلماً گروه های گسسته گروه لی نیستند. هم چنین گروه تمام توابع وارون پذیرروی یک مجموعه پیوسته اگر چه یک گروه پیوسته است ولی یک گروه لی نیست زیرا هرعنصرآن باتعداد محدودی پارامترمشخص نمی شود . درادامه این درس مفهوم گروه لی را که دربالا به آن اشاره کردیم کمی بیشتر شرح می دهیم ولی این توصیف یک توصیف دقیق ریاضی نیست ولی برای منظورمادراین درس کافی است.

## ۱ مفهوم خمینه

اگر روزی به عنوان موجودات فضایی درروی یک سطح ناشناخته قراربگیریم شاید اولین کاری که می کنیم آن است که تعیین می کنیم سطحی که روی آن قرارگرفته ایم چه شکلی است؟ آیا شکل یک کره است ویاشکل یک چنبره یا حتی چیزی پیچیده ترازآن. این کاررا می توانیم باوسایل ابتدایی انجام دهیم. مثلا می توانیم از یک نقطه شروع کنیم و قطعه طنابی را روی سطح سیاره بکشیم و بعدازطی مسیری دوسر آن را به هم ببندیم تایک طناب بسته درست کنیم.

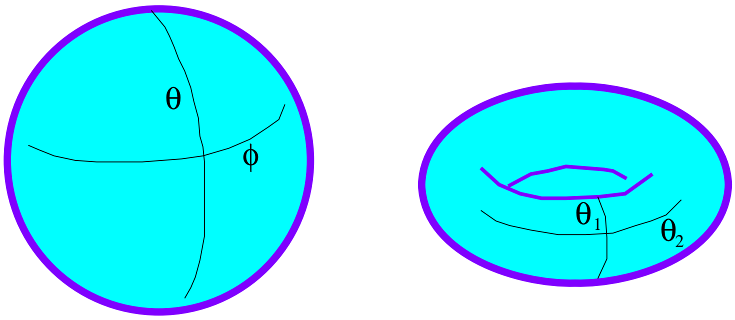
اگر بعدازآزمایش های فراوان ببینیم که طناب خود را بدون پاره کردن همواره می توانیم جمع کنیم می فهمیم که روی سطحی شبیه به کره یا بیضی گون یا یک سطح تخت قرارداریم. اما اگر بفهمیم که بعضی وقت ها طناب را نمی توانیم بدون پاره کردن جمع کنیم می فهمیم که سیاره ماحتماً باکره فرق دارد و واحتمالاً چیزی شبیه به



شکل ۱: شکل سمت چپ یک کره وشکل سمت راست یک چنبره را نشان می دهد. این دو سطح توپولوژی متفاوت دارند.

چنبره یا پیچیده ترازآن است. برای این نوع کارها تنهابه آن نیازداریم که مفهوم پیوستگی را بلد باشیم ونیازی به آن نداریم که نقاط فضای خود را مسّاحی کرده و به هرنقطه آن مختصاتی نسبت داده باشیم. بااین نوع کارها می توانیم توپولوژی فضای خود راتشخیص دهیم وآن شاخه ازریاضیات که ماراقادربه انجام این کارها می کند توپولوژی نامیده می شود. اما اگر بخواهیم کارهای بیشتری انجام دهیم مثلاً خطوط راست وزاویه و اشکال هندسی رسم کنیم و مساحت آنهاراتعیین کنیم و پستی و بلندی های سطح سیاره خود را مشخص کنیم می بایست به نقاط مختلف سیاره مختصاتی نسبت بدهیم. مختصات خوب می بایست چنان باشند که به نقاط نزدیک روی فضا مختصات نزدیک نسبت دهند. بنابراین دردرجه اول تابع مختصات که از سطح سیاره به چندتایی اعدادحقیقی یعنی $R^n$ تعریف می کنیم می بایست تابعی پیوسته باشد. هم چنین می بایست رابطه وارون پذیری بین مختصات و نقاط وجود داشته باشد به نحوی که بتوان ازهرنقطه به مختصات آن پی برد و بالعکس ازمختصات هرنقطه به خود آن نقطه. بنابراین می بایست تابع مختصات ما وارون پذیرهم باشد. اگر چنین کاری انجام دهیم می گوییم فضارابایک نقشه مختصاتی پوشانده ایم. این نقشه که مثل یک صفحه شفاف روی فضا قرارمی گیرد باعث می شود که هرنقطه از فضا یک مختصات معین داشته باشد. فضایی که به چنین مختصاتی مجهزشده است یک خمینه یا $Manifold$ نامیده می شود. تعداد مختصاتی که به هرنقطه داده می شود بعد آن خمینه خوانده می شود.

البته پیش می آید که نتوانیم تمام خمینه را با یک نقشه مختصاتی بپوشانیم و شرط های بالارا اعمال کنیم. به عنوان مثال نقشه مختصاتی $\theta, \phi$ درروی کره این عیب رادارد که به قطب شمال وجنوب مختصه $\phi$ معینی نسبت نمی دهد. هم چنین این مختصات درهمه کره پیوسته نیست. برای رفع این نقیصه می توانیم مساحی سطح مورد نظر را به این ترتیب انجام بدهیم که از مهندسان ونقشه برداران متفاوت بخواهیم که هرکدام یک ناحیه از سطح را مختصه بندی کنند. نهایتاً می توان خمینه را با نقشه های همپوشان که هرکدام تنها قسمتی از خمینه را دربرمی گیرند پوشاند. این پیچیدگی ها درنظریه خمینه هابه تفصیل و بادقت مورد بحث قرارمی گیرند. مادراین جا می توانیم ازاین ظرافت ها صرف نظرکنیم و فرض کنیم که تمام خمینه با یک نقشه پوشانده شده است و تمام نقاط




شکل ۲: سطوح توپولوژیک کره و چنبره با قراردادن نقشه های مختصاتی روی آنها تبدیل به خمینه می شوند.

خمینه بجز تعداد اندکی یا به عبارت دقیق تر ناحیه ای با اندازه صفر دارای مختصات هستند. این ساده انگاری خللی دربحث های آینده ما ایجادنخواهدکرد.چند مثال ساده زیر به درک مفهوم خمینه کمک می کند.

مثال ۱: کره دوبعدی را می توان با یک نقشه مختصاتی پوشاند . مختصات این نقشه در قطب شمال و جنوب ایراد دارند. هم چنین درروی یکی از نصف النهار ها مختصه $\phi$ دو مقدار $0$ و $2\pi$ رااختیار می کند. این ایراد تاوقتی که باتوابع پریودیک در $\phi$ کارمی کنیم جدی نیست. هرنقطه بامختصات $x, y, z$ درروی کره مختصات $\theta, \phi$ زیر را خواهد داشت.

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta\sin\phi \\ y &= \sin\theta\cos\phi \\ z &= \cos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

مثال ۲: کره سه بعدی را همانند کره دوبعدی می توان بایک نقشه مختصاتی پوشاند که به هرنقطه سه مختصه $(\theta, \phi, \psi)$ نسبت می دهد. هرنقطه بامختصات دکارتی $x_1, x_2, x_3, x_4$ مختصات $\theta, \phi, \psi$ زیر راخواهد داشت.

$$\begin{aligned} x_1 &:= \sin\theta\sin\phi\sin\psi \\ x_2 &:= \sin\theta\sin\phi\cos\psi \\ x_3 &:= \sin\theta\cos\phi \\ x_4 &:= \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

مثال ۳: چنبره دوبعدی بامختصات $\theta^1, \theta^2$، شکل (۲).

## ۲ گروه لی و خواص کلی آن

به طورحسی گروه لی به گروهی گفته می شود که عناصر آن بامختصات پیوسته مشخص شده اند. هرعنصرگروه مثل $g$ باتعدادی پارامتر که بعد آن گروه لی خوانده می شود، مشخص می شود. برای یک گروه لی $n$ بعدی این پارامترها را با $\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n$ نشان می دهیم. بنابراین هرعضواین گروه را بااین پارامترها مشخص می کنیم ومی نویسیم

$$a = g(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n). \tag{3}$$

پارامترهاراچنان انتخاب می کنیم که عنصر واحد گروه پارامترهای صفرداشته باشد،یعنی :

$$g(0, 0, \cdots, 0) = e. \tag{4}$$

حال فرض کنید که دو عضواین گروه مثل $a = g(\alpha^1, \cdots \alpha^n)$ و $b = g(\beta^1, \cdots \beta^n)$ را دریکدیگرضرب کنیم و عنصر $c = g(\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n)$ را بدست آوریم.

بنابراین داریم

$$ab = c \qquad \longrightarrow \; g(\alpha^1, \alpha^2, \cdots \alpha^n) g(\beta^1, \cdots \beta^n) = g(\gamma^1, \gamma^2, \cdots \gamma^n). \tag{5}$$

یک خاصیت مهم گروه لی آن است که پارامترهای جدید می بایست توابع پیوسته و مشتق پذیری از پارامترهای $a$ و $b$ باشند یعنی توابع

$$\gamma^i = f^i(\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^n; \beta^1, \beta^2, \cdots \beta^n), \tag{6}$$

می بایست نسبت به همه متغیرهای خود پیوسته و مشتق پذیرباشند. هم چنین اگر معکوس عنصر $a = g(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n)$ راحساب کنیم خواهیم داشت:

$$a^{-1} = g(\phi^1, \phi^2, \cdots \phi^n). \tag{7}$$

خاصیت مهم دیگر گروه لی آن است که پارامترهای عنصر $a^{-1}$ توابع مشتق پذیری ا زپارامترهای عنصر $a$ باشند. به عبارت دیگر توابع

$$\phi^i := h^i(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n), \tag{8}$$

توابع مشتق پذیری از متغیرهای خود هستند.
تمام این شرایط را می توان به صورت فشرده درتعریف زیر بیان کرد.

**تعریف گروه لی:** یک خمینه $G$ یک گروه لی خوانده می شود هرگاه توابع ضرب $m : G \times G \longrightarrow G$ و وارون $i : G \longrightarrow G$ روی آن تعریف شده باشند به قسمی که

**الف:** باعمل ضرب بالا، $G$ یک گروهِ توپولوژیک باشد

**ب:** توابع ضرب و وارون مشتق پذیرباشند.

**ج:** تمام گروه به عنوان خمینه همبند مسیری باشد.

درزیر چندمثال از گروه های لی وخمینه های مربوط به آنها می آوریم. خواننده خود براحتی می تواند تحقیق کند که شرایط دیگر گروه لی یعنی مشتق پذیری توابع ضرب ووارون دراین مثال برقراراست.

**مثال ۱:** گروه $U(1)$ یک گروه لی است. هر عضوِ $g = e^{i\theta} \in U(1)$ با یک پارامترِ $\theta$ مشخص می شود. خمینه‌ی آن دایره‌ی $S_1$ است و ضرب و وارون در آن به شکل زیر تعریف می شوند:

$$g(\theta)g(\theta') = g(\theta + \theta') \qquad g^{-1}(\theta) = g(-\theta). \tag{9}$$

**مثال ۲:** گروه $GL(2, R)$ یک گروه لی ا ست. عناصراین گروه را می توانیم به شکل زیر پارامتربندی کنیم. این پارامترها مختصات روی خمینه این گروه خواهند بود.

$$g \in GL(2, R), \longrightarrow g(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) = \begin{pmatrix} 1+\theta^1 & \theta^2 \\ \theta^3 & 1+\theta^4 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

خمینه این گروه تمام فضای $R^4$ است که ازآن صفحه $(1+\theta^1)(1+\theta^4) - \theta^2\theta^3 = 0$ را برداشته باشیم. این خمینه اگر چه همبند مسیری نیست ولی همبند است یعنی نمی توان دوقسمت آن را دردرون دو مجموعه باز که بایکدیگر اشتراک نداشته باشند محاط کرد. واضح است که نگاشت های ضرب و وارون در این گروه مشتق پذیرهستند.
**مثال ۳:** گروه $SL(2, R)$ نیز یک گروه لی است. یک پارامتربندی برای این گروه به صورت زیراست:

$$g \in SL(2, R) \longrightarrow g = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

ازآنجا که دترمینان این ماتریس می بایست برابر با یک باشد، پارامترهای فوق همه مستقل نیستند. از شرط $det(g)=1$ بدست می آوریم:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \tag{12}$$

وازآنجا می توانیم مختصات زیر را برای نقاط روی گروه بکارببریم.

$$\begin{aligned} x_0 &= \cosh\theta \\ x_1 &= \sinh\theta\cos\alpha \\ x_2 &= \sinh\theta\sin\alpha\cos\beta \\ x3 &= \sinh\theta\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

رابطه (12) نشان می دهد که خمینه این گروه یک هذلولی گون سه بعدی است.

**مثال ۴:** گروه $SU(2)$ نیزیک گروه لی است. دراین مورد داریم:

$$g \in SU(2) \longrightarrow g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 - ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

که درآن شرط $det(g)=1$ برقراراست که برحسب پارامترهابه صورت زیر است:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{15}$$

این شرط بوضوح نشان می دهد که خمینه گروه $SU(2)$ کره سه بعدی است و همان مختصات کروی روی کره سه بعدی را می توان برای ان بکاربرد. بعدازاین مثال هاباید به یک موضوع مهم اشاره کنیم وآن اینکه بسیاری از گروه های لی خمینه های ساده وآشنایی که براحتی شکل و توپولوژی آنها قابل تشخیص باشد ندارند. مهم ترین موضوعی که ماباید به آن توجه کنیم این است که توابع ضرب و وارون گروه برحسب پارامترهایی که برای گروه تعربف کرده ایم مشتق پذیرباشد. این پارامترهای همان مختصات موضعی گروه خواهد بود.

# ۳ تعریف کلی جبر لی

**تعریفِ جبرِ لی:** فضای برداری $A$ یک جبرلی خوانده می شود هرگاه یک عمل دوتایی دوخطی $[]: A \times A \longrightarrow A$ موسوم به براکت درآن تعریف شده باشد که درخاصیت های زیرصدق کند:

$$[x,y] = -[y,x]$$
$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0. \tag{16}$$

رابطه آخر اتحاد جاکوبی خوانده می شود.

یادآوری می شود که یک عمل دوخطی ($bilinear$) نسبت به هردومتغیرخود خطی است یعنی: $[\alpha x + y, z] = \alpha[x,z] + [y,z]$ و $[x, \alpha y + z] = \alpha[x,y] + [y,z]$.
هرگاه فضای برداری $A$ حقیقی (مختلط) باشد، جبرلی مربوطه نیز یک جبرحقیقی (مختلط) خوانده می شود.
بعد جبر همان بعد فضای برداری است.
هرگاه برای فضای برداری $A$ یک پایه $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ انتخاب کنیم می توانیم براکت بین عناصر پایه را بدست آوریم و درنتیجه براکت هردوبرداری از فضابدست می آید. ازآنجا که براکت دو بردارپایه خود یک برداردیگر ازفضاست می توان $[e_i, e_j]$ را برحسب بردارهای پایه فضابسط داد. درنتیجه خواهیم داشت:

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k. \tag{17}$$

ضرایب $f_{ij}^k$ ضرایب ساختاری جبرخوانده می شوند. این ضرایب بنابررابطه $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$ ، نسبت به شاخص های پایین پادمتقارن بوده وعلاوه برآن بنابراتحاد جاکوبی دررابطه زیرصدق می کنند:

$$f_{ij}^m f_{mk}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n + f_{ki}^m f_{mj}^n = 0 \tag{18}$$

## ۱.۳ مثال هایی از جبرهای لی

**مثال یک:** فضای $R^3$ با ضرب خارجی بردارهایک جبرلی است. دراین جبرداریم

$$[\vec{r}, \vec{r'}] := \vec{r} \times \vec{r'}. \tag{19}$$

**مثال دو:** فضای ماتریس های حقیقی مربعی $n$ بعدی که آن را با $M_n(R)$ نشان می دهیم یک جبرلی است. دراین فضا براکت به صورت زیرتعریف می شود:

$$[a,b] = ab - ba. \tag{20}$$

**مثال سه:** درمکانیک کلاسیک، فضای توابع تعریف شده روی فضای فاز یک جبرلی بی نهایت بعدی است. دراین فضا براکت همان کروشه پوآسون است:

$$[f,g](p,q) \equiv \{f,g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{21}$$

## ۴ مولدهای گروه لی

دو عضو گروه لی مثل $a = g(\alpha^1,\cdots\alpha^n)$ و $b = g(\beta^1,\cdots\beta^n)$ را دریکدیگرضرب کنیم و عنصر $c = g(\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_n)$ را بدست آوریم.

بنابراین داریم

$$ab = c \qquad \longrightarrow \ g(\alpha^1,\alpha^2,\cdots\alpha^n)g(\beta^1,\cdots\beta^n) = g(\gamma^1,\gamma^2,\cdots\gamma^n). \tag{22}$$

می دانیم که پارامترهای $\gamma^i$ توابع مشتق پذیری از پارامترهای $\alpha^i$ و $\beta^i$ هستند، یعنی

$$\gamma^i = f^i(\alpha^1,\alpha^2,\cdots\alpha^n,\beta^1,\beta^2,\cdots\beta^n). \tag{23}$$

باتوجه به خاصیت عضو خنثی وهم چنین رابطه (4) توابع $f^i$ دارای خاصیت زیرهستند:

$$\begin{aligned} f^i(0,0,\cdots,0;\beta^1,\beta^2,\cdots\beta^n) = \beta^i, \\ f^i(\alpha^1,\alpha^2,\cdots\alpha^n;0,0,\cdot 0) = \alpha^i. \end{aligned} \tag{24}$$

حال اگر عناصر $a$ و $b$ را در نزدیکی عنصر واحد گروه انتخاب کنیم، مختصات $\alpha^i$ و $\beta^i$ نیز بسیار کوچک خواهند بود، و در نتیجه مختصات $\gamma^i$ بسیار کوچک خواهند بود. می توانیم $\gamma^i$ را به صورت زیر تا مرتبه دو برحسب $\alpha^i$ و $\beta^i$ ها بسط دهیم:

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i + C^i_{jk}\alpha^j\beta^k + \cdots. \tag{25}$$

در نوشتن این بسط از قیودِ 24 استفاده کرده‌ایم. دقت کنید که افزودن جملات دیگری نظیر $\alpha^i\alpha^j$ به این بسط ناقض شرط (24) خواهد بود.

ازاین به بعد برای سادگی ازاین به بعد بحث خود را به گروه های ماتریسی به عنوان مهم ترین گروه های لی محدود می کنیم. این کارتجزیه تحلیل ما را ازبسیای جهات ساده می کند اگر چه نتایجی که نهایتاً بدست می آوریم برای همه گروه های لی برقرارهستند.

ازآنجا که پارامترهای هرسه عنصر کوچک هستند می توانیم آنهاراحول صفر بسط دهیم. درنتیجه

$$
\begin{aligned}
a &= I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j T_{ij} + \cdots, \\
b &= I + \beta^i T_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \cdots, \\
c &= I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j T_{ij} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

که درآن ازقراردادجمع روی شاخص های تکراری استفاده کرده ایم و $T_i$ ها و $T_{ij}$ هاماتریس هستند. ضمناً دقت کنید که $T_{ij} = T_{ji}$.
درنتیجه رابطه (??) به شکل زیردرمی آید:

$$
(I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j T_{ij} + \cdots)(I + \beta^i T_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \cdots) = (I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j T_{ij} + \cdots). \tag{27}
$$

حال بسط (25) را دررابطه (27) قرارمی دهیم و بدلیل کوچکی پارامترها آن ها را تارتبه دوم نگاه می داریم. یک مقایسه ساده نشان می دهد که رابطه زیربین ضرایب ماتریسی برقراراست:

$$
T_{jk} = T_j T_k - C^i_{jk} T_i. \tag{28}
$$

این رابطه دونتیجه مهم دربردارد. اول اینکه ضرایب بسط درجه دوم یعنی $T_{jk}$ ها برحسب ضرایب بسط درجه اول یعنی $T_j$ ها تعیین می شوند. دقت کنید که این خاصیت درمورد بسط یک تابع کاملاً غیرعادی واستثنایی است. دوم این که اگر این رابطه را از رابطه مشابه آن که باعوض کردن جای اندیس های $j, k$ بست می آید عوض کنیم و ازخاصیت $T_{jk} = T_{kj}$ استفاده کنیم نتیجه می شود

$$
T_j T_k - T_k T_j = (C^i_{jk} - C^i_{kj}) T_i, \tag{29}
$$

که می توان آن را به صورت زیرنوشت:

$$
[T_j, T_k] = f^i_{jk} T_i. \tag{30}
$$

دراین رابطه $[a, b]$ براکت یا تعویضگرخوانده می شود و به معنای $ab - ba$ است و ضرایب $f^i_{jk}$ که نسبت به اندیس های پایین خود پادمتقارن هستند ثابت های ساختاری گروه لی خوانده می شوند. چنانکه رابطه (28) نشان می دهد ضرایب درجه دوم نیز برحسب آنها بدست می آید وهرگاه استدلال بالاراتارتبه های بالاتر ادامه بدهیم خواهیم دید که درواقع ضرایب همه رتبه هابرحسب $T_i$ ها بدست می آیند. به همین دلیل ماتریس های $T_i$ مولد های گروه خوانده می شوند. دومین نتیجه ای که بدست آورده ایم آن است که همانطور که رابطه (30)

نشان می دهد، مولد های جبر تحت عمل تعویضگر یا براکت بسته هستند. هرگاه ساختاری شبیه به این داشته باشیم آن را یک جبرلی می خوانیم.
بنابراین نشان داده ایم که $T_i$ ها مولد های گروه لی یک فضای برداری را بوجود می آورند که همان فضای مماس بر گروه در نقطه واحد هستند و این فضای برداری یک جبر لی نیز هست. این که چرا به $T_i$ ها که فقط بردارهای مماس بر یک نقطه هستند، مولدهای گروه لی می گویند به این دلیل است که دربسط هر عنصرگروه حول نقطه واحد گروه می توان تمام ضرایب بسط را بادردست داشتن مولد هابدست آورد. درواقع دیدیم که هرعنصر باپارامترهای $\theta^1, \cdots \theta^n$ حول عنصرواحد بسطی به شکل زیردارد:

$$g(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n) = I + \theta^i T_i + \frac{1}{2!}\theta^i\theta^j T_{ij} + \frac{1}{3!}\theta^i\theta^j\theta^k T_{ijk} + \cdots \tag{31}$$

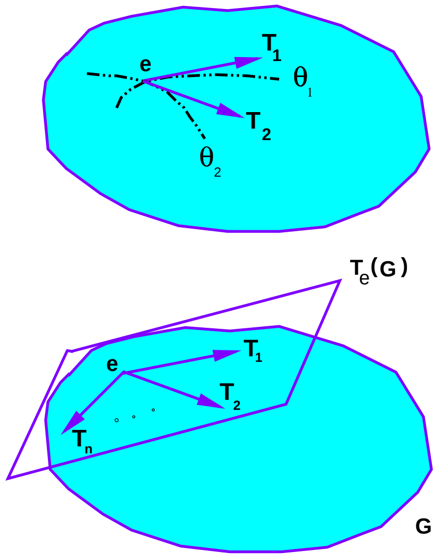
وهمه ضرایب بسط از ضرایب رتبه یک یعنی $T_i$ ها بدست می آیند. ضمناً دقت می کنیم که عبارت ساده ای برای مولد ها بدست آورد. براحتی معلوم می شود که

$$T_i = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} \mid_{\theta=0} . \tag{32}$$

این رابطه بیان می کند که مولدهای $T_i$ مماس برخم های یک پارامتره $g(0, \cdots \theta_i \cdots 0)$ هستند که ازنقطه واحد گروه عبورمی کنند. معنای هندسی این امر این است که $T_i$ بردارهای مماس برخمینه گروه درنقطه واحد ودرجهت پارامتر $\theta_i$ است. مجموعه تمام این بردارهای مماس درنقطه واحد یک فضای خطی می سازد که آن را فضای مماس برگروه درنقطه واحد می خوانیم. شکل (۳) رابطه گروه لی و جبرلی را ازنظرهندسی نشان می دهد. قبلاً نشان دادیم که مجموعه مولد هاتحت رابطه براکت یک مجموعه بسته است. درریاضیات یک فضای خطی را که درآن یک رابطه براکت بااین خواص تعریف شده باشد یک جبرلی خوانده می شود. هرگاه به جای مختصات $\theta_i$ مختصات دیگری مثل $\theta'_i$ برای همسایگی عنصر واحد انتخاب کنیم و مولدهای جدید را با $T'_i$ نشان دهیم آنگاه این مولدهای جدید چیزی نیستند جز ترکیب خطی از مولدهای جدید. دلیل اش هم این است که

$$T'_i = \frac{\partial g}{\partial \theta'^i} \mid_{\theta=0} = \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \mid_{\theta=0} \frac{\partial g}{\partial \theta^j} \mid_{\theta=0} = S_i^j T_j, \tag{33}$$

که درآن $S_i^j := \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \mid_{\theta=0}$. دراینجا بازهم از مشتق پذیربودن توابع مختصاتی نسبت به هم استفاده کرده‌ایم. بنابراین هر تغییر مختصات یک نگاشت خطی در فضای مماس روی نقطه واحد گروه یعنی روی جبر لی القا می کند.




شکل ۳: $T_1$ و $T_2$ دوبردارمماس برگروه درنقطه واحد گروه هستند (شکل بالا). مجموعه تمام بردارهای مماس جبرلی گروه را تشکیل می دهد (شکل پایین).

# ۵ نگاشت نمایی

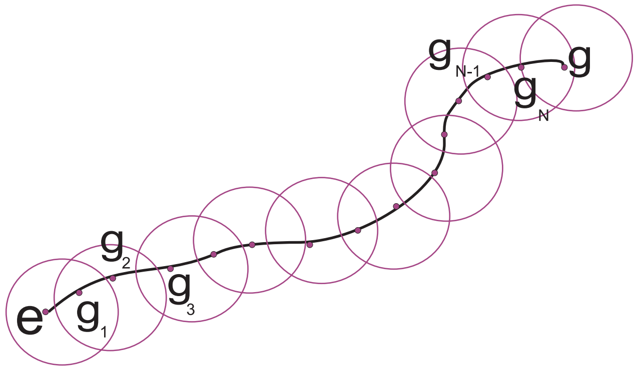
دراین قسمت می خواهیم نشان دهیم که هر عنصر گروه لی را می توان به صورت $g = e^{\Phi^i T_i}$ نمایش داد که در آن $T_i$ ها مولد های بی نهایت کوچک یعنی عناصر جبر هستند و $\Phi_i$ ها توابعی مشتق پذیر از پارامترها یعنی مختصات موضعی گروه هستند. می توان در واقع $\Phi^i$ را به عنوان مختصات موضعی نقاط گروه بکاربرد. اثبات ما دراین قسمت ممکن است از دقت ریاضی بهره مند نباشد ولی ایده‌های اصلی و فیزیکی رابطه جبر و گروه لی را در بردارد. نخست دقت کنید که اگر عنصرگروهی را درنزدیکی نقطه واحد درنظربگیریم می توان آن را به شکل زیربسط داد:

$$g \approx I + \epsilon^i T_i \tag{34}$$

که درآن $\epsilon^i$ ها پارامترهای بی نهایت کوچک و $T_i$ ها مولدهای گروه لی هستند. دقت کنیدکه این مولدها مستقل از $\epsilon^i$
ها هستند. حال می دانیم که اگر $g$ عضوگروه لی $G$ باشد هرتوانی از آن نیز عضوگروه $G$ خواهد بود. بنابراین می توان نوشت

$$g^N = (I + \epsilon^i T_i)^N \in G. \tag{35}$$

حال اگر پارامترهای $\theta^i$، پارامترهای کوچکی نباشند می توان عدد $N$ را آنقدربزرگ انتخاب کردکه پارامترهای




شکل ۴: هر عضو گروه مثل $g$ با یک مسیر پیوسته به عنصر واحد متصل می شود.

$\frac{\theta^i}{N}$ هراندازه که بخواهیم کوچک شوند بطوری که بسط (34) برای پارامترهای $\epsilon^i = \frac{\theta^i}{N}$ باهردقتی که بخواهیم برقرارباشد. درنتیجه می توان نوشت که به ازای هرمقدارازپارامترهای $(\theta^1, \cdots \theta^n)$ ،

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}(I+\frac{\theta^i}{N}T_i)^N \in G \tag{36}$$

که ازآن نتیجه می گیریم به ازای هرمقدارازپارامترهای $(\theta^1, \cdots \theta^n)$

$$e^{\theta^i T_i} \in G. \tag{37}$$

تاکنون نشان داده ایم که به ازای هرمقدارازپارامترها عناصر $g \equiv e^{\theta^i T_i}$ عضوگروه $G$ هستند. این مطلب یک باردیگر مناسب بودن نام مولد را برای $T_i$ ها نشان می دهد. بالعکس همه عناصر گروه را می توان به این صورت نوشت . برای فهم این مطلب به شکل ?? توجه می کنیم.
بنابر تعریف گروه لی و هم بند مسیری بودن آن ، هر عضو گروه مثل $g$ با یک مسیر پیوسته به عنصر واحد متصل می شود. حال عناصر $g_1$، $g_2$ تا $g_N$ را روی این مسیر در نظر می گیریم. می توانیم بنویسیم

$$g = g(g_N^{-1}g_N)(g_{N-1}^{-1}g_{N-1})(g_{N-2}^{-1}g_{N-2})\cdots(g_3^{-1}g_3)(g_2^{-1}g_2)(g_1^{-1}g_1)e. \tag{38}$$

حال طرف راست را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$g = (gg_N^{-1})(g_N g_{N-1}^{-1})(g_{N-1}g_{N-2}^{-1})\cdots(g_3 g_2^{-1})(g_2 g_1^{-1})g_1. \tag{39}$$

نکته مهم این است که در عبارت جدید هرکدام از عناصر داخل پرانتز در نزدیکی عنصر واحد گروه هستند. این امر از خاصیت توپولوژیک بودن گروه ناشی شده‌است. ( چون $g_1$ نزدیک $g_2$ است، پس $g_1^{-1}$ نزدیک ${g_2}^{-1}$ است. چون $g_2g_2^{-1}$ برابر با واحد است، پس $g_2g_1^{-1}$ نزدیک عنصر واحد است. این استدلال برای همه پرانتز ها درست است.)

حال هرکدام از عناصر داخل پرانتز را می توان به صورت زیر بسط داد و این بسط تا مرتبه اول $\epsilon^i$ صحیح است.

$$g_i g_{i-1}^{-1} \approx I + \epsilon^i T_i = e^{\epsilon^i T_i} \tag{40}$$

وقتی به حاصل ضرب دو عنصر مثل عنصر فوق می رسیم داریم

$$(g_i g_{i-1}^{-1})(g_{i-1} g_{i-2}^{-1}) = e^{\epsilon^i T_i} e^{\epsilon'^i T_i} \tag{41}$$

اما دراین جا از بسط $Cambell - Baker - Hausdorf$ استفاده می کنیم که بر مبنای آن

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\cdots}. \tag{42}$$

این بسط با توجه به خاصیت مهم بسته بودن جبرلی تحت عمل تعویضگر ها نشان می دهد که حاصل ضرب هر دو پرانتز را می توان بازهم به صورت $e^{\epsilon''^i T_i}$ ها نوشت که در آن $\epsilon''^i$ توابعی از $\epsilon^i$ ها و $\epsilon'^i$ ها نوشت. بنابراین در حدِ $N \longrightarrow \infty$ حاصل ضرب همه پرانتز ها را می توان به صورت تابع نمایی نوشت یعنی اینکه

$$g = e^{\Phi^i T_i}. \tag{43}$$

## ٦ جبرلی وابسته به گروه های لی ماتریسی

دردرس گذشته دیدیم که هر گاه یک عنصرگروه لی ماتریسی مثل $g(\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n)$ راحول نقطه واحد بسط دهیم،

$$g(\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^n) = I + \theta^i T_i + \frac{1}{2}\theta^i \theta^j T_{ij} + \cdots \tag{44}$$

آنگاه $T_i$ ها مولد های گروه لی خوانده می شوند زیرا تمام ضرایب دیگر بسط از روی این ضرایب بدست می آید و می توان نهایتاً عناصر گروه را به صورت زیرنوشت:

$$g(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n) = e^{\theta^i T_i}. \tag{45}$$

برای بدست آوردن جبرلی گروه های لی ماتریسی متفاوت کافی است که یک پارامتربندی صحیح از یک ماتریس عمومی دراین گروه ها داشته باشیم و سپس مولد هارا از بسط (44) و یا رابطه

$$T_i := \frac{\partial g}{\partial \theta^i} |_{\theta=0}, \tag{46}$$

بدست آوریم.

معمولاً جبرلی یک گروه را باهمان نام و لی باحروف کوچک نشان می دهیم. مثلاً جبرلی گروه $U(n)$ رابا $u(n$ وجبرلی گروه $SO(n)$ را با $so(n)$ نشان می دهیم. درزیربخش زیر چندمثال از جبرهای لی گروه های ماتریسی ارائه می دهیم و تعیین جبرلی بقیه گروه هارا به تمرین ها واگذارمی کنیم.

## ۱.٦ جبر لی $so(n)$

هرگاه $g \in SO(n)$ عضوی ازگروه درنزدیکی واحد باشد می توان آن را به شکل $g \approx I + L$ نوشت. همانطورکه دردرس پنجم دیدیم متعامد بودن $g$ به این معناست که $L$ یک ماتریس پادمتقارن است. بنابراین می توان آن رابرحسب یک پایه برای ماتریس های پادمتقارن بسط داد. این پایه را به شکل زیر می نویسیم:

$$M_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \qquad i < j, \tag{47}$$

ودرنتیجه $g$ بسط زیررا خواهد داشت:

$$g = I + \theta^{ij} M_{ij} + \cdots \tag{48}$$

$M_{ij}$ ها مولدهای جبرلی $so(n)$ هستند. روابط جابجایی آنهابراحتی بدست می آید وعبارت است از:

$$[M_{ij}, M_{kl}] = \delta_{jk} M_{il} + \delta_{li} M_{kj} - \delta_{ik} M_{jl} - \delta_{lj} M_{ki}. \tag{49}$$

جبرلی $so(n)$ یک جبر $n(n+1)/2$ بعدی است.

به خصوص جبرلی $so(3)$ یک جبر سه بعدی است و برای مولدهای آن نامگذاری جدیدی را به ترتیب زیر قرارمی دهیم

$$J_1 := M_{23}, \qquad J_2 := M_{31}, \qquad J_3 := M_{12}. \tag{50}$$

که بااین نامگذاری جدید روابط جابجایی به شکل زیردرمی آید:

$$[J_1, J_2] = -J_3, \qquad [J_2, J_3] = -J_1, \qquad [J_3, J_1] = -J_2. \tag{51}$$

## ۲.۶ جبرلی $su(2)$

مولدهای این جبر ماتریس های پادهرمیتی و بدون ردّ دو در دو هستند. آنهارابه صورت زیرانتخاب می کنیم:

$$T_1 := \frac{i}{2}\sigma_1, \qquad T_2 := \frac{i}{2}\sigma_2, \qquad T_3 := \frac{i}{2}\sigma_3. \tag{52}$$

روابط جابجایی به شکل زیراست:

$$[T_1, T_2] = -T_3, \qquad [T_2, T_3] = -T_1, \qquad [T_3, T_1] = -T_2. \tag{53}$$

## ۳.۶ جبرلی $sl(2, R)$

مولدهای این جبر ماتریس های جقیقی و بدون ردّ دو در دو هستند. آنهارابه صورت زیرانتخاب می کنیم:

$$S_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

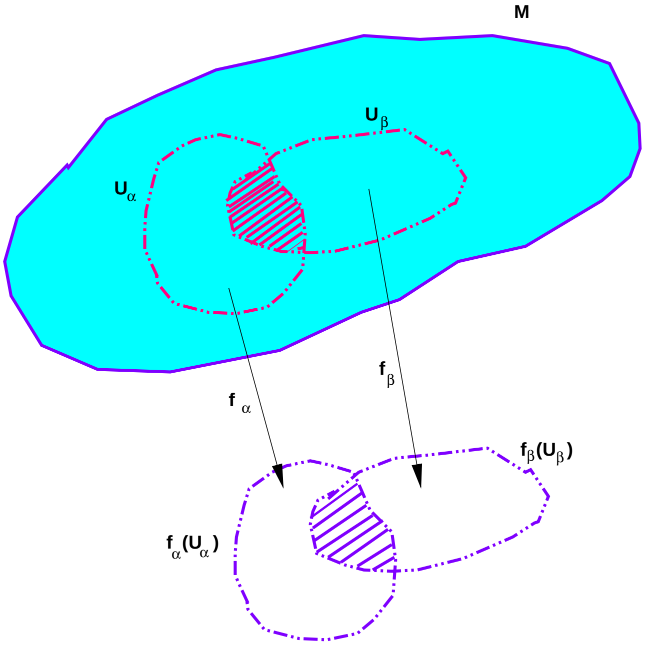
روابط جابجایی به شکل زیراست:

$$[S_1, S_2] = -S_3, \qquad [S_2, S_3] = -S_1, \qquad [S_3, S_1] = S_2. \tag{55}$$

درتمرین ها با جبرلی گروه های ماتریسی دیگر نیزآشناخواهیم شد. فعلاً می بایست درمسیرحرکت خود کمی استراحت کنیم و بجای ادامه مطالعه جبرهای لی وساختارهای مربوط به آنها، توجه خود را به مطالعه نمایش های گروه ها بخصوص گروه های متناهی ونمایش روی توابع معطوف کنیم. این کاربه خصوص باتوجه به نقش مهم نمایش ها درفیزیک اهمیت دارد. درآینده به موضوع ساختمان جبرهای لی بازخواهیم گشت.

# ۷ ضمیمه

برای خواننده ای که به تعریف دقیق خمینه علاقمند است این تعریف رادراینجا ارایه می کنیم.
یک خمینه $M$ فضای توپولوژیکی است که درآن یک دسته از زیرمجموعه های باز $\{U_1, U_2, \cdots, U_N\}$ تعریف




شکل ۵: خمینه $M$ و دوتا ازنقشه های آن.

شده است به قسمی که اجتماع آنهاهمه $M$ رامی پوشاند. هرکدام اززیرمجموعه های بازمثل $U_\alpha$ با یک تابع پیوسته ووارون پذیر $f_\alpha$ بایک ناحیه باز از$R^n$ همانریخت شده است. یعنی

$$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow R^n \tag{56}$$

تصویر $U_\alpha$ تحت $f_\alpha$ را با $f_\alpha(U_\alpha)$ نشان می دهیم. $n$ بعد خمینه نامیده می شود. به زبان ساده این شرط بیان می کند که خمینه به طور موضعی می بایست همانریخت با $R^n$ باشد. مثلاً سطح یک کره به طورموضعی همانریخت با $R^2$ و داخل یک کره به طور موضعی همانریخت با $R^3$ است.
زوج $(U_\alpha, f_\alpha)$ را یک نقشه و مجموعه تمام $(U_\alpha, f_\alpha)$ ها را یک اطلس می خوانیم. تابع $f_\alpha$ درحقیقت به نقاط $U_\alpha$ مختصات نسبت داده است. اگر $p \in U_\alpha$ آنگاه مختصات $p$ را دراین نقشه با

$$f_\alpha(p) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots x_n^\alpha) \tag{57}$$

نشان می دهیم. حال باید مختصات نقشه های مختلف شرط مهمی را رعایت کنند وآن اینکه دراشتراک بین هردومجموعه باز مثل $U_\alpha$ و $U_\beta$ تابع تغییر مختصات می بایست مشتق پذیرباشد، به عبارت بهترتابع

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{58}$$

شکل (۵) یک خمینه را با دوتاازنقشه ها نشان می دهد.

می بایست یک تابع مشتق پذیرباشد. اگر نقطه $p \in U_a \cap U_\beta$ آنگاه تابع فوق به زبان ساده ترکار زیررا انجام

می دهد:

$$(x_1^\beta, x_2^\beta, \cdots x_n^\beta) \longrightarrow p \longrightarrow (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots, x_n^\alpha). \tag{59}$$

دریک خمینه تمام توابع ازنوع فوق می بایست مشتق پذیرباشند. به عبارت دیگر تمام مشتقات جزیی $\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}$ می بایست وجود داشته باشند.

بین فضاهای توپولوژیک تنها می توانستیم درباره پیوستگی توابع صحبت کنیم ولی باداشتن مختصات روی خمینه هامی توانیم راجع به مشتق پذیری توابع نیز حرف بزنیم. فرض کنید که $H : M \longrightarrow N$ یک تابع باشد. اطلس روی خمینه $m$ بعدی $M$ را با $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ و اطلس روی خمینه $n$ بعدی $N$ را با $\{V_\alpha, g_\alpha\}$ نشان دهیم. فرض کنید که این تابع نقطه $p \in U_\alpha \subset M$ را به نقطه $H(p) \in V_\beta \subset N$ می نگارد. دراین صورت تابع $g_\beta \circ H \circ f_\alpha^{-1}$ تابعی است از ناحیه ای از $R^m$ به ناحیه ای از $R^n$ است. حال تابع $H$ رادرنقطه $p$ مشتق پذیر می گوییم اگر تابع $g_\beta \circ H \circ f_\alpha^{-1}$ در مختصات نقطه $p$ مشتق پذیرباشد. به عبارت خیلی ساده اگرمختصات نقطه $p$ را درنقشه $U_\alpha$ با $(x_1^\alpha, \cdots x_m^\alpha)$ و مختصات نقطه $H(p)$ را درنقشه $V_\beta$ با $(y_1^\beta, \cdots y_n^\beta)$ نشان دهیم می بایست مشتقات جزیی

$$\frac{\partial y_i^\beta}{\partial x_j^\alpha} \tag{60}$$

وجود داشته باشند. بدلیل توابع تغییرمختصات درهرکدام ازخمینه هامشتق پذیرهستند، هرگاه تابع $H$ را برحسب مختصات دیگری نیز بیان کنیم همچنان مشتق پذیر باقی خواهد ماند.